88107309

MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Jueves 4 de noviembre de 2010 (tarde)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

Los tres primeros términos de una progresión geométrica infinita son 32, 16 y 8.

(a) Escriba el valor de r. *[1 punto]*

(b) Halle u_6. *[2 puntos]*

(c) Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 7]*

Sea $g(x) = 2x \operatorname{sen} x$.

(a) Halle $g'(x)$. *[4 puntos]*

(b) Halle la pendiente de la gráfica de g para $x = \pi$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

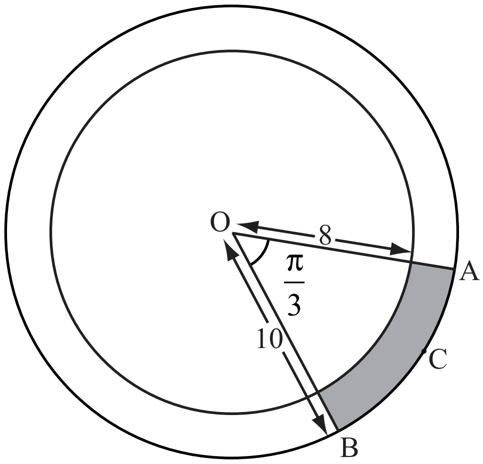
. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 6]*

La figura muestra dos círculos concéntricos con centro en O.



la figura no está dibujada a escala

El círculo pequeño tiene un radio de 8 cm y el círculo grande tiene un radio de 10 cm. Los puntos A, B y C están situados sobre la circunferencia del círculo grande, de tal forma que $\mathrm{A\hat{O}B}$ es igual a $\frac{\pi}{3}$ radianes.

(a) Halle la longitud del arco ACB. *[2 puntos]*

(b) Halle el área de la región sombreada. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

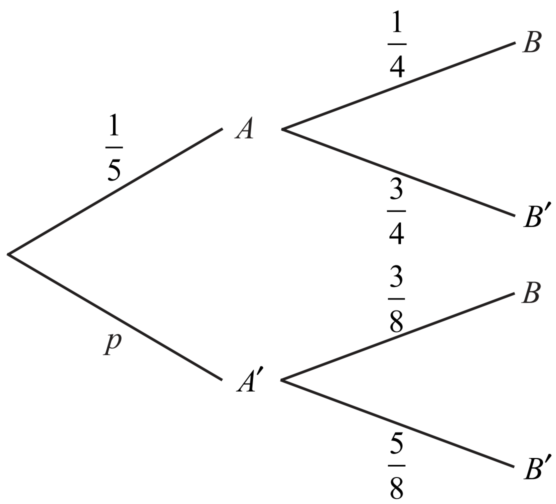
. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 7]*

El siguiente diagrama muestra las probabilidades de los sucesos A y B, siendo $\mathrm{P}(A') = p$.



(a) Escriba el valor de p. *[1 punto]*

(b) Halle $\mathrm{P}(B)$. *[3 puntos]*

(c) Halle $\mathrm{P}(A'|B)$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 7]*

(a) Compruebe que $4-\cos 2\theta+5\operatorname{sen}\theta=2\operatorname{sen}^2\theta+5\operatorname{sen}\theta+3$. *[2 puntos]*

(b) **A partir de lo anterior**, resuelva la ecuación $4-\cos 2\theta+5\operatorname{sen}\theta=0$ para $0\le\theta\le 2\pi$. *[5 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

La gráfica de la función $y = f(x)$ pasa por el punto $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. La función pendiente de f viene dada por $f'(x) = \text{sen}\,(2x - 3)$. Halle $f(x)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 7]*

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9e^x & e^x \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix}$.

(a) Halle una expresión para $\det \boldsymbol{A}$. *[2 puntos]*

(b) Halle el valor de x para el cual $\boldsymbol{A}$ no tiene inversa. Exprese la respuesta de la forma $a \ln b$, donde a, $b \in \mathbb{Z}$. *[5 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

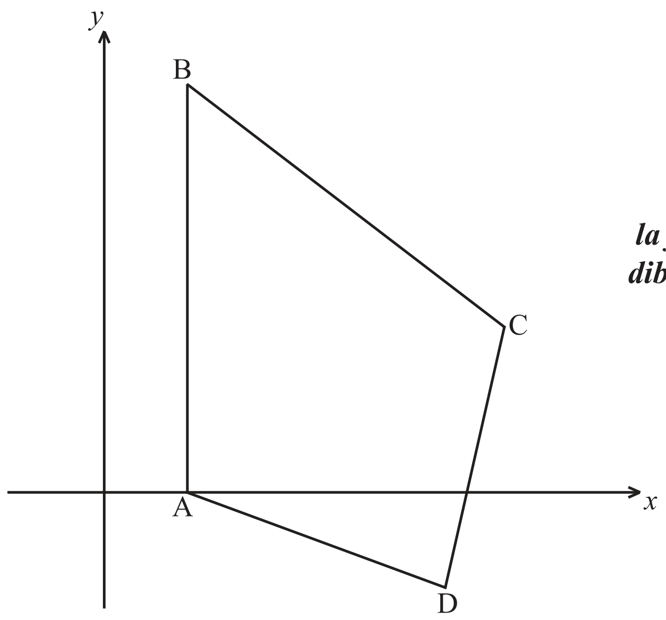
***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

8. *[Puntuación máxima: 17]*

La figura muestra un cuadrilátero ABCD de vértices $A(1, 0)$, $B(1, 5)$, $C(5, 2)$ y $D(4, -1)$.



la figura no está dibujada a escala

(a) (i) Compruebe que $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Halle $\overrightarrow{BD}$.

(iii) Compruebe que $\overrightarrow{AC}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BD}$. *[5 puntos]*

La recta (AC) tiene por ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$.

(b) (i) Escriba el vector $\boldsymbol{u}$ y el vector $\boldsymbol{v}$.

(ii) Halle una ecuación vectorial para la recta (BD). *[4 puntos]*

Las rectas (AC) y (BD) se cortan en el punto $P(3, k)$.

(c) Compruebe que $k = 1$. *[3 puntos]*

(d) **A partir de lo anterior** halle el área del triángulo ACD. *[5 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

9. *[Puntuación máxima: 12]*

Sean $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = x - 1$.

(a) Halle $(f \circ g)(x)$. *[2 puntos]*

El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ traslada la gráfica de $(f \circ g)$ a la gráfica de h.

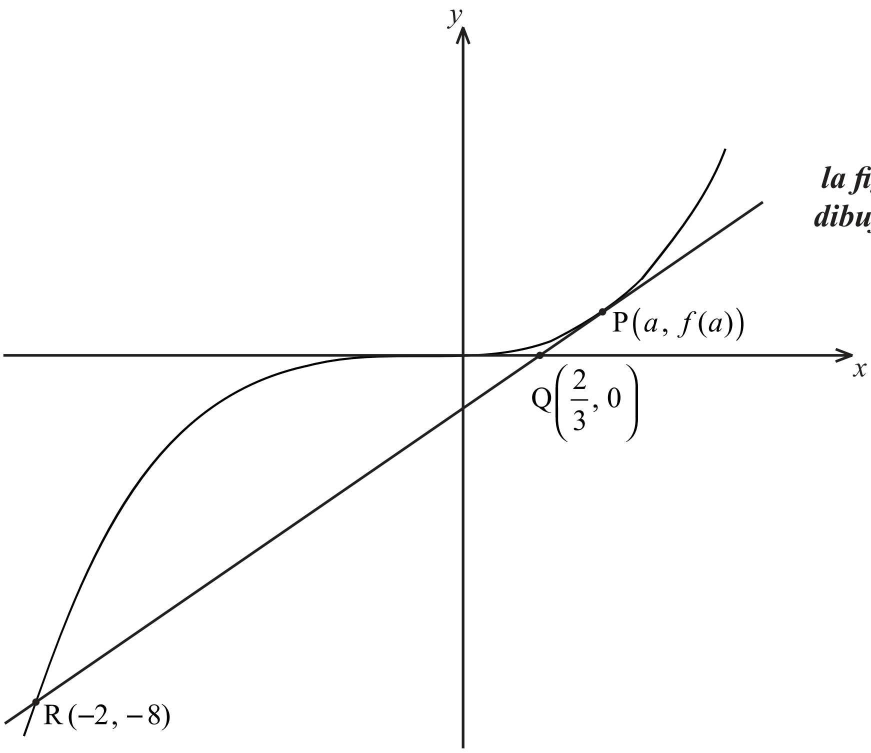
(b) Halle las coordenadas del vértice de la gráfica de h. *[3 puntos]*

(c) Compruebe que $h(x) = x^2 - 8x + 19$. *[2 puntos]*

(d) La recta $y = 2x - 6$ es tangente a la gráfica de h en el punto P. Halle la coordenada x de P. *[5 puntos]*

10. *[Puntuación máxima: 16]*

Sea $f(x) = x^3$. La figura que aparece a continuación muestra parte de la gráfica de f.



El punto $\mathrm{P}(a, f(a))$, donde $a > 0$, pertenece a la gráfica de f. La tangente en el punto P corta al eje x en el punto $\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Esta tangente y la gráfica de f se cortan en el punto $\mathrm{R}(-2, -8)$.

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

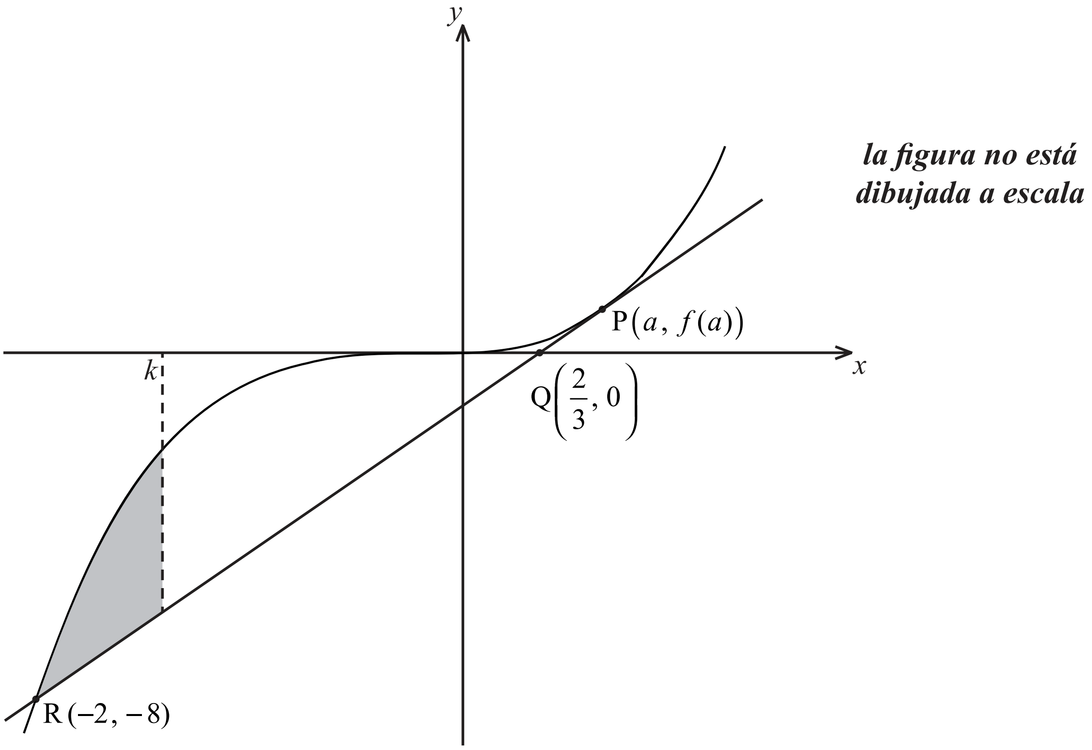
(Pregunta 10: continuación)

(a) (i) Compruebe que la pendiente de [PQ] es igual a $\dfrac{a^3}{a-\frac{2}{3}}$.

(ii) Halle $f'(a)$.

(iii) A partir de lo anterior compruebe que $a=1$. *[7 puntos]*

La ecuación de la tangente en P es $y=3x-2$. Sea T la región delimitada por la gráfica de f, la tangente [PR] y la recta $x=k$, entre $x=-2$ y $x=k$, donde $-2<k<1$. Se representa en el diagrama incluido a continuación.



(b) Sabiendo que el área de T es $2k+4$, compruebe que k satisface la ecuación $k^4-6k^2+8=0$. *[9 puntos]*